

Remarque

Proposition

- (1) Une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.
- (2) Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui engendrent $\mathbb{R}^n$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

Preuve: en exercice (sur moodle)

1.8 Introduction aux applications linéaires

But

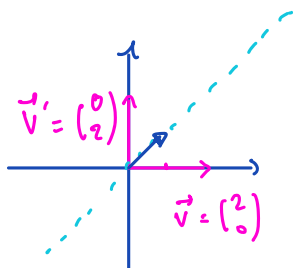
Le produit matrice - vecteur peut être vu comme une action sur les vecteurs. Nous allons interpréter les matrices comme des applications.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \text{ on a}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Interprétation géométrique:



A représente une symétrie d'axe donné par la droite vectorielle $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identité) $A\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

A représente l'appl. "identité".

Définition 20 (application/transformation).

Une *application* ou *transformation* T de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ est une opération qui assigne à chaque vecteur de $\mathbb{R}^n$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{ll} T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m & \mathbb{R}^n: \text{ens. de départ} \\ \vec{x} \longmapsto T(\vec{x}) & \mathbb{R}^m: \text{" d'arrivée} \end{array}$$

Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$ est l'image de $\vec{x}$ par T

l'ens. de toutes les images de T s'appelle l'image de T , notée $\text{Im}(T)$.

On a $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^m$.

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \rightsquigarrow T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

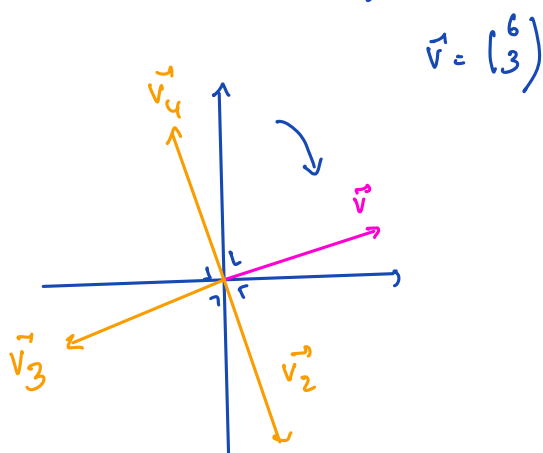
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad \text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

2) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightsquigarrow T_{A'}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad \text{Im}(T) \subset \mathbb{R}^3$$

Ces applications s'appellent des projections.

3) $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{aligned} A'' \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\ A'' \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \\ A'' \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\dots \end{aligned}$$

A'' correspond à une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens horaire.

Définition 21 (application linéaire).

Une application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire si

$$\begin{aligned} 1) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \\ 2) \quad T(\lambda \vec{u}) &= \lambda T(\vec{u}) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (scalaire)} \\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Exemples

1) Soit $\underline{r} \in \mathbb{R}$. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\vec{x} \mapsto r \cdot \vec{x}$

T est linéaire (preuve en exercice). Il s'agit d'une homothétie de rapport r

($0 < r < 1$: contraction
 $r > 1$: dilatation)

$\underline{r=1}$ $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
identité

2) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ n'est pas linéaire !

3) translation: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{t}$ ($\vec{t}$ vect. de la translation)

$$T(\vec{x} + \vec{y}) \stackrel{?}{=} T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$T(\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{t} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{t}$$

en général
 $\vec{t} \neq 2\vec{t}$

$$T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = (\vec{x} + \vec{t}) + (\vec{y} + \vec{t}) = \vec{x} + \vec{y} + 2\vec{t}$$

$\Rightarrow$ la translation n'est pas lin. !

4) Applications matricielles A $m \times n$ matrice

A induit une appl. lin.

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

T_A est linéaire

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A(\lambda \vec{x}) = \lambda \cdot A\vec{x}$$

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

(en exercice)

Propriétés Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors T satisfait :

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$. En effet : $T(\vec{0}) = T(0 \cdot \vec{v}) \stackrel{\text{lin.}}{=} 0 \cdot T(\vec{v}) = \vec{0}$
2. Principe de superposition :

$$T(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = T(\lambda \vec{u}) + T(\mu \vec{v}) \\ = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$$

Plus généralement

$$T(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_p \vec{u}_p) = T\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{u}_i\right) = \lambda_1 T(\vec{u}_1) + \dots + \lambda_p T(\vec{u}_p) = \sum_{i=1}^p \lambda_i T(\vec{u}_i)$$

Remarque

Pour montrer la linéarité d'une application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, il suffit de montrer qu'on a

$$T(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Justification en exercice (moodle)

Matrice associée à une transformation linéaire

Exemple

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ linéaire} \\ \text{avec } T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ et } T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(\vec{x}) = T(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) \\ \uparrow \\ T \text{ lin (princ. de superposition)}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = (T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2))$$

Théorème 10. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors il existe une matrice A de taille $m \times n$ unique telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

A est donnée par

$$A = (T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)) \quad \text{où } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^n$$

A_T s'appelle la matrice canoniquement associée à T .

Preuve

Existence: Soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Par linéarité de T , on a

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= T(x_1 \vec{e}_1) + \dots + T(x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 T(\vec{e}_1) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) \quad (*) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n))}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{par déf. du} \\ \text{produit} \\ \text{"matrice } \times \text{ vecteur"} \end{array} \right\}$$

Unicité: Supposons qu'il existe une autre B (taille $m \times n$) t.q. $T(\vec{x}) = B\vec{x} \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Soit $1 \leq j \leq n$.

$$B \vec{e}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{mj} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{e}} \text{ ligne}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{e}} \text{ colonne de } B \quad))$$

$$A \vec{e}_j = \dots \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \leftarrow j^{\text{e}} \text{ colonne de } A$$

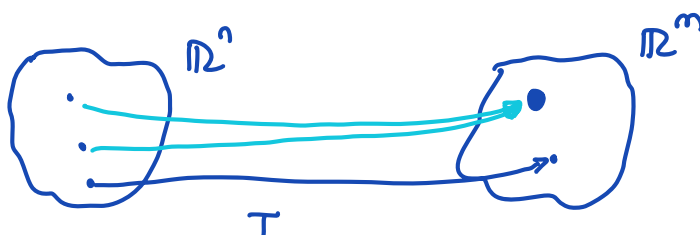
$$\text{la } j^{\text{e}} \text{ col. de } A = \text{la } j^{\text{e}} \text{ col. de } B \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

$$\Rightarrow A = B.$$

Applications injectives et surjectives

Définition 22 (surjectivité).

Une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *surjective* si tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au moins un vecteur de $\mathbb{R}^n$:



exemples: 1) Soit $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ projection
 $\vec{x} \mapsto T_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de $T_1 \Rightarrow$
 T_1 n'est pas surjective.

2) $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\vec{x} \mapsto T_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ projection

T_2 est surjective: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ est l'image de

$$T_2 \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

(3) $\leftarrow$ quelconque

3) $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Im}(T_3) = \text{span} \{ \vec{e}_1 \} \subsetneq \mathbb{R}^3 \quad \triangle$$

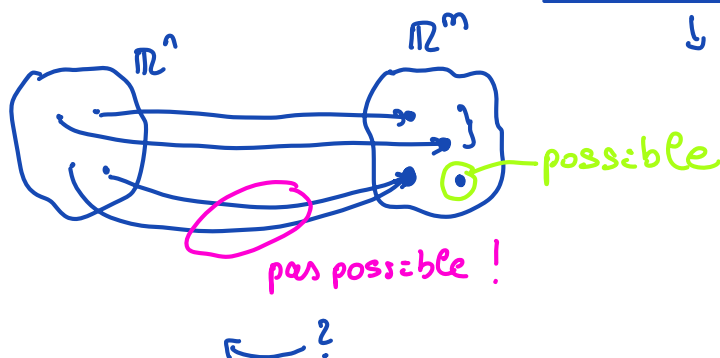
// Pour une appl. surjective, on a $\text{Im}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$

4) $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T_4(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Ici $\text{Im}(T_4) = \mathbb{R}^3$, T_4 surj.

Définition 23 (injectivité).

Une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite *injective* si tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'au plus un vecteur de $\mathbb{R}^n$.



Remarques

1) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$

2) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est injective $\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au plus une solution

$\Leftrightarrow \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{x} \neq \vec{y}$, alors

$$T(\vec{x}) \neq T(\vec{y})$$

Définition Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si T est à la fois injective et surjective, elle est dite bijjective.

Chaque vecteur de $\mathbb{R}^m$ est l'image par T d'exactly un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Ex.

	inj	surj	bij
T_1			
T_2			
T_3			
T_4			

trouver T_5 pour compléter le tableau.

Théorème 11. Soient $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire et A la matrice canoniquement associée. Alors les énoncés suivants sont équivalents

1. T est surjective $(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$
"
- ② $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b}$ est comb. lin. des colonnes de A .
- ③ A possède un pivot par ligne

C'est le prolongement du th. 5

2. est équivalent à $\text{span} \{ \vec{a}_1 \dots \vec{a}_n \} = \mathbb{R}^m$

2. " " " $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$

Théorème 12. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors

T est injective $\Leftrightarrow T(\vec{x}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$ (*)

Preuve

" $\Rightarrow$ ": T injective, donc par déf, $T(\vec{x}) = \vec{0}$ a au plus une solution. Par ailleurs, on sait que $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

" $\Leftarrow$ ": On va supposer que T n'est pas injective et montrer qu'on a une contradiction (dém. par l'absurde)

Il existe $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ avec $\vec{u} \neq \vec{v}$ et $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$. (*)

Donc $T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{0}$

d'où $T(\underbrace{\vec{u} - \vec{v}}_{=\vec{0}}) = \vec{0}$

Cette équation n'admet que la sol. triviale par (*)

Donc $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, d'où $\vec{u} = \vec{v}$, ce qui est une contradiction à cause de (*)

Donc T est forcément injective.